数理解析研究所講究録
1119 巻 1999 年 110-124

拘束系に対するDirac代数の表現の問題

大貫義郎

名古屋女子大学文学部

1 Dirac 代数

$D+1$ 次元の平坦な空間 R^{D+1} においてハミルトニアン $H=\frac{1}{2}p_{\alpha}^{2}+V(x)$ で運動する質点が

$$f(x)=0 \tag{1.1}$$

で与えられた十分滑らかな D 次元の閉じた曲面上に拘束されている場合を考えよう.

ここで $x=(x_{1}, x_{2}, \cdots, x_{D+1})$, かつ $\alpha=1,2, \cdots, D+1$, また一つの項の中に同じギリシャ文字の添字が2個あればそれについて 1 から $D+1$ までの和がとられているものとする.

このような系の正準変数 x_{α}, p_{α} を用いた記述は50年ほど前にDirac [1] によって議論された. 彼は主として古典論を扱ったが, それを量子論的に書けば次のようになるであろう[1] .

$$\{f_{,\alpha}(x), p_{\alpha}\}=0, \tag{1.2}$$

$$[x_{\alpha}, x_{\beta}]=0, \tag{1.3}$$

$$[x_{\alpha}, p_{\beta}]=i\Lambda_{\alpha\beta}(x), \tag{1.4}$$

$$[p_{\alpha}, p_{\beta}]=-\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{R^{2}(x)}\Big(f_{,\alpha}(x)f_{,\beta\gamma}(x)-f_{,\beta}(x)f_{,\alpha\gamma}(x)\Big), p_{\gamma}\right\} \tag{1.5}$$

ただし

$$f_{,\alpha}(x)\equiv\frac{\partial f(x)}{\partial x_{\alpha}}, \quad f_{,\alpha\beta}(x)\equiv\frac{\partial^{2}f(x)}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}},$$

[1] Dirac の古典論からその量子論への拡張はこれ以外にもあるかも知れないが, ここでは形式がもっとも簡単と思われるものを採用した.

かつ

$$R^2(x) \equiv f_{,\alpha}(x) f_{,\alpha}(x), \quad \Lambda_{\alpha\beta}(x) \equiv \delta_{\alpha\beta} - \frac{f_{,\alpha}(x) f_{,\beta}(x)}{R^2(x)}. \tag{1.6}$$

交換関係 (1.3) ~ (1.5) が式 (1.1), (1.2) と両立することは容易に確かめられる．さらにこの代数の表現空間における内積 $<\chi|\varphi>$ を，x を対角化した表示で波動関数 $\varphi(x)$, $\chi(x)$ を用い

$$<\chi|\varphi> = \int d^{D+1}x\, \delta(f(x))\, \chi^*(x)\, \varphi(x) \tag{1.7}$$

で定義する．以下，(1.2) ~ (1.5) を $f(x)=0$ 上の **Dirac 代数**と呼ぶ．

古典論と異なり量子論では，このような Dirac 代数をみたす演算子 x_α, p_α が存在するかどうか，存在すれば一意であるか，具体的にはどのように表され，また自己共役であるか，といったことが吟味されなければならない．物理は直接これに依存するからである．しかしこの作業は (1.4), (1.5) の右辺の非線形性のために Lie 代数の表現論が使えず簡単ではない．

なお後の議論との関連でスケール変換

$$x_\alpha \to \rho x_\alpha, \quad p_\alpha \to \frac{1}{\rho} p_\alpha \qquad (\rho > 0) \tag{1.8}$$

のもとでの理論の振舞いをみておこう．このとき上記の変換に対応して

$$f(x) \to \bar{f}(x) \equiv f(\rho x) \tag{1.9}$$

とすると (1.1)~(1.5) のかたちは保たれ，かつ

$$\int d^{D+1}x\, \delta(f(x)) = \rho^{D+1} \int d^{D+1}x\, \delta(\bar{f}(x)) \tag{1.10}$$

となる．従って上記のスケール変換のもとで波動関数 $\varphi(x)$, $\chi(x)$ に対し

$$\varphi(x) \to \varphi(\rho x) = \rho^{-(D+1)/2} \bar{\varphi}(x), \qquad \chi(x) \to \chi(\rho x) = \rho^{-(D+1)/2} \bar{\chi}(x) \tag{1.11}$$

なる変換を仮定すればそれらの内積は不変に保たれることが分かる．すなわち

$$\int d^{D+1}x\, \delta(f(x))\, \chi^*(x)\, \varphi(x) = \int d^{D+1}x\, \delta(\bar{f}(x))\, \bar{\chi}^*(x)\, \bar{\varphi}(x). \tag{1.12}$$

以下，波動関数はスケール変換によってこのように規格化してあるものとする．

2 二つのDirac代数の関係

そこで回り道をして (1.1) とは別の多様体

$$g(x)=0 \tag{2.1}$$

の上に拘束された系を導入しよう．このとき上の議論と同様にして

$$\{\,g_{,\alpha}(x),\, p_\alpha\,\}=0, \tag{2.2}$$

$$[\,x_\alpha,\, x_\beta\,]=0, \tag{2.3}$$

$$[\,x_\alpha,\, p_\beta\,]=i\Lambda'{}_{\alpha\beta}(x), \tag{2.4}$$

$$[\,p_\alpha,\, p_\beta\,]=-\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{R'^2(x)}\Big(g_{,\alpha}(x)g_{,\beta\gamma}(x)-g_{,\beta}(x)g_{,\alpha\gamma}(x)\Big),\, p_\gamma\right\}, \tag{2.5}$$

が導かれる．ただし

$$R'^2(x)=g_{,\alpha}(x)g_{,\alpha}(x) \quad \text{および} \quad \Lambda'_{\alpha\beta}(x)=\delta_{\alpha\beta}-\frac{g_{,\alpha}(x)g_{,\beta}(x)}{R'^2(x)}. \tag{2.6}$$

である．ここで，二つの多様体 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ は diffeomorphic mapping

$$x'_\alpha=x'_\alpha(x) \quad (\,\text{したがって}\, x_\alpha=x_\alpha(x')\,) \tag{2.7}$$

で結ばれていて

$$g(x')=f(x) \tag{2.8}$$

なる関係にあるものとする．このとき

定理:

(i) x_α, p_α が $f(x)=0$ 上の Dirac 代数をみたすとき，上記の任意の diffeomorphic mapping に対して変数変換

$$\left\{\begin{array}{l} x'_\alpha=x'_\alpha(x), \quad (\,x_\alpha=x_\alpha(x'_\alpha)\,) \\[2ex] p'_\alpha=\dfrac{1}{2}\{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta},\, p_\beta\}, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

で与えられる x'_α，p'_α は $g(x)=0$ 上の Dirac 代数をみたす．ただし $\Lambda'(x')$，$[\partial x/\partial x']$ は $(D+1)$ 次の正方行列でその α-β 要素はそれぞれ ${\Lambda'}_{\alpha\beta}(x')$，$\partial x_\beta/\partial x'_\alpha$ である．

(ii)　(2.9) の第 2 式は p_α について一意的に解くことができて，次式が成り立つ．

$$p_\alpha = \frac{1}{2}\{(\Lambda(x)[\partial x'/\partial x])_{\alpha\beta},\, p'_\beta\}. \tag{2.10}$$

上の定理を証明する準備として 次の 2 点に注目しよう．

1. 演算子 A，B，C が $[[C, A], B]=0$ をみたすとき

$$\{A, \{B, C\}\} = \{\{A, B\}, C, \}. \tag{2.11}$$

さらに，もし $[A, B]=0$ であれば

$$\frac{1}{2}\{A, \{B, C\}\} = \{AB, C\}. \tag{2.12}$$

(証明略)

2. 次の恒等式が成り立つ．

$$\Lambda(x)[\partial x'/\partial x]\Lambda'(x') = \Lambda(x)[\partial x'/\partial x]. \tag{2.13}$$

[証明]

(2.6) で定義された ${\Lambda'}_{\gamma\beta}(x')$ を上式の左辺（$l.h.s.$）に代入すると

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\text{-element of } l.h.s. &= (\Lambda(x)[\partial x'/\partial x])_{\alpha\beta} - \frac{1}{R'^2(x')}\Lambda_{\alpha\rho}(x)\frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\rho}g_{,\gamma}(x')g_{,\beta}(x')\\ &= (\Lambda(x)[\partial x'/\partial x])_{\alpha\beta} - \frac{1}{R'^2(x')}\Lambda_{\alpha\rho}(x)f_{,\rho}(x)g_{,\beta}(x')\\ &= (\Lambda(x)[\partial x'/\partial x])_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

ここで，(2.8) とともに $\Lambda_{\alpha\rho}(x)f_{,\rho}(x)=0$ を用いた．[証明終]

以上の準備のもとに，まず定理の (ii) を証明しよう．

(2.9) の第 2 式の両辺と $(\Lambda(x)\,[\partial x'/\partial x])_{\gamma\alpha}/2$ との対称積をつくって α について和をとり，(2.11) を用いれば

$$\frac{1}{2}\{(\Lambda(x)[\partial x'/\partial x])_{\gamma\alpha},\, p'_\alpha\} = \frac{1}{4}\Big\{(\Lambda(x)[\partial x'/\partial x])_{\gamma\alpha},\, \{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta},\, p_\beta\}\Big\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(\Lambda(x)[\partial x'/\partial x]\Lambda'(x')[\partial x'/\partial x])_{\gamma\beta},\, p_\beta\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(\Lambda(x)[\partial x'/\partial x][\partial x/\partial x'])_{\gamma\beta},\, p_\beta\} = \frac{1}{2}\{\Lambda_{\gamma\beta}(x),\, p_\beta\}$$

ここで (2.12)，(2.13) を用いた．さらに上式の右辺に (1.6) で与えられた $\Lambda_{\gamma\beta}(x)$ の具体的の形を入れ，(2.12)，(1.2) を使うと

$$p_\gamma - \frac{1}{2}\left\{\frac{f_{,\gamma}(x)f_{,\beta}(x)}{R^2(x)},\, p_\beta\right\} = p_\gamma - \frac{1}{4}\left\{\frac{f_{,\gamma}(x)}{R^2(x)},\, \{f_{,\beta}(x),\, p_\beta\}\right\}$$
$$= p_\gamma,$$

となる．よって定理の (ii) が導かれた．なお (2.9) の第 2 式の解 (2.12) が一意であることは，上の議論からほぼ明らかであろう．実際，解が二つあるとしてそれらを p_α，$\bar{p}_\alpha$ とすれば，(2.9) より

$$2p'_\alpha = \{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta},\, p_\beta\} = \{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta},\, \bar{p}_\beta\}.$$

よって $0 = \{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta},\, (p_\beta - \bar{p}_\beta)\}$ となるゆえ，上と同じ議論を経れば $p_\beta - \bar{p}_\beta = 0$. すなわち解の一意性が保証される．

次に定理の (i) を証明しよう．

まず (2.2) は下のようにして容易に導かれる．(2.9) の第 2 式の両辺と $g_{,\alpha}(x')$ の反交換積をつくれば直ちに

$$\{g_{,\alpha}(x'),\, p'_\alpha\} = \frac{1}{2}\Big\{g_{,\alpha}(x'),\, \{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta},\, p_\beta\}\Big\}$$
$$= \Big\{g_{,\alpha}(x')\Lambda'_{\alpha\gamma}(x')[\partial x/\partial x']_{\gamma\beta},\, p_\beta\Big\} = 0,$$

ただし，(2.12) および恒等式 $g_{,\alpha}(x')\Lambda'_{\alpha\gamma}(x') = 0$ を用いた．

続いて (2.4) を導こう．x'_α と p'_β の交換関係は，(2.9) より

$$[x'_\alpha,\, p'_\beta] = \frac{1}{2}[x'_\alpha,\, \{(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\beta\gamma},\, p_\gamma\}]$$
$$= (\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\beta\gamma}[x'_\alpha,\, p_\gamma] = i(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'])_{\beta\gamma}\Lambda_{\gamma\rho}(x)[\partial x'/\partial x]_{\rho\alpha}$$
$$= i(\Lambda'(x')[\partial x/\partial x'][\partial x'/\partial x])_{\beta\alpha} = i\Lambda'_{\alpha\beta}(x').$$

すなわち，(2.4) が導かれた．ここで (2.13) と同様にして得られる恒等式 $\Lambda'(x')[\partial x/\partial x']\Lambda(x) = \Lambda'(x')[\partial x/\partial x']$ を用いた．

最後に (2.5) を示す．(2.9) の第 2 式を用いての直接計算は複雑なので，ここでは次のように議論を進めることにする．交換積 $[p'_\alpha, p'_\beta]$ は (1.4)，(1.5) を用いれば，p_γ $(\gamma = 1, 2, \cdots, D+1)$ に関する 1 次式である．それゆえ，(2.10) を用いてこの p_γ を書き換えれば

$$[p'_\alpha, p'_\beta] = \frac{i}{2}\{\, c_\gamma^{[\alpha\beta]}(x'), p'_\gamma \,\} \tag{2.14}$$

と表すことができる．ただし，$c_\gamma^{[\alpha\beta]}(x')$ は x' の未定関数である．そこで x'_γ と (2.14) との交換積とつくると，まず左辺は (2.4)，(2.6) により

$$\begin{aligned}[x'_\gamma, [p'_\alpha, p'_\beta]] &= [[x'_\gamma, p'_\alpha], p'_\beta] + [p'_\alpha, [x'_\gamma, p'_\beta]] \\ &= -i\left[\frac{g_{,\gamma}(x')g_{,\alpha}(x')}{R'^2(x')}, p'_\beta\right] + i\left[\frac{g_{,\gamma}(x')g_{,\beta}(x')}{R'^2(x')}, p'_\alpha\right].\end{aligned}$$

他方，右辺は

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\left\{ c_\rho^{[\alpha\beta]}(x'), [x'_\gamma, p'_\rho] \right\} &= -\Lambda'_{\gamma\rho}(x')\, c_\rho^{[\alpha\beta]}(x') \\ &= -c_\gamma^{[\alpha\beta]}(x') + \frac{1}{R'^2(x')} g_{,\gamma}(x')g_{,\rho}(x')\, c_\rho^{[\alpha\beta]}(x')\end{aligned}$$

となる．それゆえこの二つの結果を等置すれば

$$\begin{aligned}c_\gamma^{[\alpha\beta]}(x') = &\frac{1}{R'^2(x')} g_{,\gamma}(x')g_{,\rho}(x')\, c_\rho^{[\alpha\beta]}(x') \\ &+ i\left[\frac{g_{,\gamma}(x')g_{,\alpha}(x')}{R'^2(x')}, p'_\beta\right] - i\left[\frac{g_{,\gamma}(x')g_{,\beta}(x')}{R'^2(x')}, p'_\alpha\right]\end{aligned}$$

を得る．この $c_\gamma^{[\alpha\beta]}(x')$ を (2.14) の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}[p'_\alpha, p'_\beta] = &\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{R'^2(x')}\, c_\rho^{[\alpha\beta]}(x') g_{,\rho}(x') g_{,\gamma}(x'), p'_\gamma\right\} \\ &-\frac{1}{2}\left(\left\{\left[\frac{1}{R'^2(x')}\, g_{,\alpha}(x')g_{,\gamma}(x'), p'_\beta\right], p'_\gamma\right\} - (\alpha \leftrightarrow \beta)\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

ここで (2.12) および (2.2) を考慮すれば，右辺の第 1 項が 0 となることが直ちに分かる．他方，右辺第 2 項に現れる括弧 $[\cdots, p'_\beta]$ の部分は，(2.4) を用いての直接の計算により

$$
\begin{aligned}
\Big[\frac{1}{R'^2(x')}\,g_{,\alpha}(x')g_{,\gamma}(x'),\,p'_\beta\Big] &= i\,\Lambda'_{\rho\beta}(x')\,\frac{\partial}{\partial x'_\rho}\Big(\frac{1}{R'^2(x')}\,g_{,\alpha}(x')g_{,\gamma}(x')\Big)\\
&= \frac{i}{R'^2(x')}\bigg(g_{,\alpha\beta}(x')g_{,\gamma}(x') - g_{,\alpha}(x')g_{,\beta}(x')g_{,\rho}(x')g_{,\gamma}(x')\frac{\partial}{\partial x'_\rho}\Big(\frac{1}{R'^2(x')}\Big)\\
&\qquad -\frac{g_{,\alpha}(x')g_{,\beta}(x')g_{,\rho}(x')g_{,\gamma\rho}(x')}{R'^2(x')}\bigg) + \frac{i}{R'^2(x')}g_{,\alpha}(x')g_{,\beta\gamma}(x')\\
&\qquad -\frac{i}{R'^4(x')}\Big(2g_{,\beta\rho}(x')g_{,\alpha}(x')g_{,\rho}(x') + g_{,\alpha\rho}(x')g_{,\rho}(x')g_{,\beta}(x')\Big)\,g_{,\gamma}(x').
\end{aligned}
$$

これより直ちに

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{1}{R'^2(x')}\,g_{,\alpha}(x')g_{,\gamma}(x'),\,p'_\beta\Big] - (\alpha\leftrightarrow\beta)\\
&\qquad = \frac{i}{R'^2(x')}\Big(g_{,\alpha}(x')g_{,\beta\gamma}(x') - g_{,\beta}(x')g_{,\alpha\gamma}(x')\Big)\\
&\qquad\quad -\frac{i}{R'^4(x')}\Big(g_{,\alpha}(x')g_{,\beta\rho}(x')g_{,\rho}(x') - g_{,\beta}(x')g_{,\alpha\rho}(x')g_{,\rho}(x')\Big)\,g_{,\gamma}(x')
\end{aligned}
$$

が得られる．さらにこの式の両辺と p'_γ との反交換積をつくろう．このとき (2.12) および (2.2) によって上式右辺第 2 項からの寄与は 0 になることが分かる．従って残りの第 1 項に $-1/2$ をかけたものが (2.15) の右辺となり，結局

$$
[p'_\alpha,\,p'_\beta] = -\frac{i}{2}\Big\{\frac{1}{R'^2(x')}\Big(g_{,\alpha}(x')g_{,\beta\gamma}(x') - g_{,\beta}(x')g_{,\alpha\gamma}(x')\Big),\,p'_\gamma\Big\}
$$

を得る．すなわち (2.5) が導かれた．

以上により定理は証明された．

定理は任意の diffeomorphic mapping $x'_\alpha = x'_\alpha(x)$ に対して成り立つが，しかし内積にこの変換を施すと，一般に x に依存する Jacobian が現れてその形を崩してしまう．実際それを波動関数にくりこめば内積の形は見かけ上たもたれるが，これは演算子の自己共役性などに影響をもたらす．しかし，すでに述べたようにスケール変換のもとで多様体の体積は (1.9) のように変換される．そこで順序として，これによってその体積をまず次のように規格化しておく．

$$
\int d^{D+1}x\,\delta(f(x)) = \int d^{D+1}x\,\delta(g(x)) \tag{2.16}
$$

このようにして，与えられた diffeomorphic mapping をスケール変換と上式をみたす変換との積に分け，後者を取り出して考えることにしよう．ところが後者，つまり (2.8) に加えて (2.16)

をみたす diffeomorphic mapping のなかには，area-preserving ともいうべき

$$d^{D+1}x\,\delta(f(x)) = d^{D+1}x'\,\delta(g(x')) \tag{2.17}$$

に従う変換が常に（しかも無限個）存在する [2] [2]．(2.17) は $\delta(f(x)) = \det[\partial x'/\partial x]\delta(f(x))$ と等価である．われわれは diffeomorphic mapping として，このような area-preserving mapping のみを用いることにする．そうすれば x に依存する Jacobian に煩わされることはない．そうしてそのときの波動関数 $\varphi(x)$ の変換をスカラーつまり

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \tag{2.18}$$

とすれば，内積の値の不変性

$$\int d^{D+1}x\,\delta(f(x))\chi^*(x)\varphi(x) = \int d^{D+1}x\,\delta(g(x))\chi'^*(x)\varphi'(x) \tag{2.19}$$

が保証されることになる．

このようにして，$f(x) = 0$ 上の Dirac 代数の理論は，スケール変換と area-preservinng mapping を媒介として，$g(x) = 0$ 上の Dirac 代数の理論に移行する．すでに述べたように (2.9) の逆変換は一意であるから，両者の対応は 1 対 1 であり，そうしてこの対応付けの変数変換は明らかに同一の Hilbert 空間上で行われる．結果として，一方の Dirac 代数の既約表現空間は他方の Dirac 代数の既約表現空間でもある．言い換えれば，$f(x) = 0$ 上の Dirac 代数の既約表現空間は，$f(x)$ のスムーズな変化のもとで不変であることが分かる．このことは注目してよい．

なお，area-preservinng mapping が一つの多様体，例えば $f(x) = 0$ 上で行われる場合には内積のかたちが変わらない．

$$\int d^{D+1}x\,\delta(f(x))\chi^*(x)\varphi(x) = \int d^{D+1}x\,\delta(f(x))\chi'^*(x)\varphi'(x). \tag{2.20}$$

それゆえこのときの area-preservinng mapping には，$[\,f(x), U\,] = 0$ に従うユニタリー演算子 U が対応し

$$\varphi'(x)|_{f(x)=0} = U\varphi(x)|_{f(x)=0}, \qquad \chi'(x)|_{f(x)=0} = U\chi(x)|_{f(x)=0} \tag{2.21}$$

[2] area-preserving mapping は非圧縮流体の各点の連続的な変化および変形に対応し，その意味でこのような写像の存在は物理的には納得しやすい．

と書くことができる．そうしてこの変換のもとでは正準変数は

$$x'_\alpha = U^\dagger x_\alpha U, \quad p'_\alpha = U^\dagger p_\alpha U \tag{2.22}$$

に変換する．もちろん primary constraint のかたちを変えるような area-preservinng mapping には，このようなユニタリー演算子は存在しない．

このようにしてわれわれは，正準変数 x_α，p_α で記述される $f(x) = 0$ 上の Dirac 代数と x'_α，p'_α で記述される $g(x') = 0$ 上の Dirac 代数は，単なる変数変換で書き変えられることを見てきた．ただ注意すべきは，ここでの変数変換は同一の対象をすべてにわたってそのまま別の文字で書き表すことを意味していない点である．例えば $g(x') = 0$ 上のハミルトニアンは $H' = \frac{1}{2}{p'}^2_\alpha + V(x')$ である．これは，$f(x) = 0$ 上のハミルトニアン $H = \frac{1}{2}p^2_\alpha + V(x)$ を，(2.9) を利用して x'_α，p'_α という文字で書き表したものではない．primary constraint のかたちが変われば H' は H と同じでなく，その結果，この変数変換により系の力学的な内容は変更をうけることになるのである．

3 既約表現

この節では，議論を具体化するために，D 次元の多様体 $f(x) = 0$ が D 次元球面 S^D と diffeomorphic mapping で結ばれている場合を考えよう．(2.10) を逆に解き，x_α と x'_α，p_α と p'_α を入れ替えると

$$\begin{cases} x'_\alpha = x'_\alpha(x), \\ p'_\alpha = \dfrac{1}{2}\{(\Lambda(x')[\partial x/\partial x'])_{\alpha\beta}, p_\beta\} \end{cases} \tag{3.1}$$

となる．ここでは (2.10) における $f(x)$ と $g(x)$ が入れ替わるので，上記の $x'_\alpha = x'_\alpha(x)$ はもちろん

$$f(x') = g(x) \tag{3.2}$$

に従う．また右辺の x_α，p_α が (2.1) ~ (2.5) をみたすという前提のもとに，左辺の x'_α，p'_α は (1.1) ~ (1.5) を満足する．

ここで，$g(x)=0$ の多様体を S^D とみなそう．すなわち

$$g(x)=x_\alpha x_\alpha-1. \tag{3.3}$$

ここでは簡単のために S^D の半径を1とした．ところで，さきにわれわれは S^D 上の Dirac 代数の既約表現をすべての D にわたって具体的にことごとく決定した [3]．それゆえこれを用いれば (3.1) により $f(x)=0$ 上の Dirac 代数の既約表現を余すところなく決めることができる．そこで，まず S^D 上の Dirac 代数の既約表現を下にまとめておく．

以下では議論を見やすくするために，x を対角化した表示をとることにして

$$L_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{i}\left(x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\beta}-x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) \tag{3.4}$$

$$(\alpha,\,\beta=1,\,2,\,\cdots,\,D+1)$$

なる記号を用いよう．もちろん x_α は

$$x_\alpha x_\alpha-1=0 \tag{3.5}$$

に従う．このとき S^D 上の Dirac 代数の既約表現における p_β $(\beta=1,2,\cdots,D+1)$ は次のように与えられる．

***D*= 1**

$$\begin{cases} p_1=-\dfrac{1}{2}\{x_2,\,L_{12}\}-\alpha x_2, \\ p_2=\ \ \dfrac{1}{2}\{x_1,\,L_{12}\}+\alpha x_1 \end{cases} \qquad (0\le\alpha<1) \tag{3.6}$$

ここで，既約表現は上記の α の値により一意的に決定される．すなわち異なる α には互いに非同値な既約表現が対応し，従って $D=1$ おいては連続無限個の非同値な既約表現空間が存在することになる．

***D*≥ 2**

$$p_\beta=\frac{1}{2}\{x_\rho,\,L_{\rho\beta}\} \tag{3.7}$$

このときは，ユニタリー同値なものを除いて既約表現は一意的である．

(3.6), (3.7) のそれぞれの p_α の固有値問題は，実際に解くことができ，いずれの場合にも実固有値のみが存在し，固有関数の全体は完全系をつくっていることが示される [3]．従ってここでの p_α は，内積 $\int dx^{D+1}\,\delta(x_\alpha x_\alpha - 1)\chi^*(x)\varphi(x)$ のもとにおける自己共役演算子とみなすことができる．

この p_α を (3.1) の右辺に用いれば，直ちに S^D に diffeomorphic な多様体 $f(x)=0$ の上の Dirac 代数の既約表現が書き下される．

$D = 1$

$$p'_\beta = \frac{1}{2}\{\,(\Lambda(x')[\partial x'/\partial x\,])_{\beta\gamma}\,x_\rho,\,L_{\rho\gamma}\,\}$$
$$-\,\alpha(\Lambda(x')[\partial x'/\partial x\,])_{\beta\gamma}\,x_\rho\,\epsilon_{\rho\gamma},\quad (0\le\alpha<1). \tag{3.8}$$

ここで，$\epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=-1$，$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$．

$D \geq 2$

$$p'_\beta = \frac{1}{2}\{\,(\Lambda(x')[\partial x'/\partial x\,])_{\beta\gamma}\,x_\rho,\,L_{\rho\gamma}\,\} \tag{3.9}$$

このようにして，既約表現が完全に求まった．もちろん最終的には，右辺は x'_α およびその微分 ∂'_α を用いて書き換えられる必要がある．その結果得られた表式は，S^D と $f(x)=0$ をつなぐ area-preserving mapping $x'_\alpha = x'_\alpha(x)$ （これは無数にある）の形に依存することになるが，実はこれらはすべて互いにユニタリー同値である．その理由を述べておこう．

まず $D\geq 2$ 場合を考えよう．簡単のために S^D 上の Dirac 代数の既約表現を与える正準変数を ξ_A ($A=1,2,\cdots,2(D+1)$) [3]．またこれと area-preserving mapping ϕ および $\tilde\phi$ で結ばれる $f(x)=0$ 上の Dirac 代数の既約表現における正準変数をそれぞれ ξ'_A および $\tilde\xi'_A$ とし，その関係を

$$\xi' = \phi(\xi),\quad \tilde\xi' = \tilde\phi(\xi) \tag{3.10}$$

とかく[4]．このとき $\tilde\xi \equiv \phi^{-1}(\tilde\xi')$ とすれば，$\tilde\xi$ は S^D 上の Dirac 代数の既約表現になっている．

---

[3] 正準変数との関係は $\xi_\alpha = x_\alpha$，$\xi_{\alpha+D+1}=p_\alpha$ $(\alpha=1,2,\cdots,D+1)$ とする．以下の ξ'_A，$\tilde\xi'_A$，$\tilde\xi_A$ についても正準変数との対応は同様にとる．

[4] 正確には，例えば第 1 式は $\xi'_A=\phi_A(\xi)$ であるが，面倒なので添字を省略する．以下この記法を用いる．

ここで (3.10) の第 2 式を用いれば

$$\tilde{\xi} = \phi^{-1} \cdot \tilde{\phi}(\xi). \tag{3.11}$$

すなわち，$\phi^{-1} \cdot \tilde{\phi}$ は S^D 上の area-preserving mapping を記述する．前節の終の方の議論よれば，この mapping に対応して，いま扱っている既約表現空間上のユニタリー演算子（U とかく）が存在する．従ってここでの既約表現の一意性を考慮すれば，これによって S^D 上の二つの既約表現 ξ と $\tilde{\xi}$ は結ばれて，$\tilde{\xi} = U^\dagger \xi U$ とかかれる．この両辺に ϕ を作用させれば

$$\tilde{\xi}' = U^\dagger \phi(\xi) U = U^\dagger \xi' U \tag{3.12}$$

それゆえ $\tilde{\xi}'_A = U^\dagger \xi'_A U$ となり，$D \geq 2$ の場合，(3.9) の既約表現から 2 種類の area-preserving mapping によってもたらされる $f(x) = 0$ 上の Dirac 代数の二つの既約表現はユニタリー同値であることが示された．

また $D = 1$ のときも，$f(x) = 0$ 上の Dirac 代数をみたし，かつパラメーター α の値が等しい二つの既約表現が，互いに同値であることを上と全く同様にして結論することができる．α の値が異なる二つの既約表現が非同値であることは言うまでもない．

最後に，(3.8)，(3.9) における p'_β の自己共役性について触れておこう．これらがエルミート（対称）作用素であることはその形から明らかであるが，さらにいくつかの状況証拠から，area-preserving mapping $x'_\alpha = x'_\alpha(x)$ が x の関数として十分滑らかであれば，自己共役でもあると予想している．ただこの議論は未完成なのでここではこれ以上立ち入らない．できれば，いずれ詳しい議論をつくりたいと思っている．この際，$D = 1$ と $D \geq 2$ ではやや異なる議論が必要のようである．

なお，p'_β が自己共役であるとすればそのスペクトルが問題になる．これも推論の域をでないが，古典的には p'_β は多様体 $f(x) = 0$ の接線方向の運動量成分であり任意の値をとることができる．この事情は恐らく量子論でも変わるまい．そうだとすれば，スペクトルは $(-\infty, \infty)$ であることが予想される．ちなみに S^D の場合の p'_β のスペクトルが $(-\infty, \infty)$ であることは直接の計算で示されている [3].

4　おわりに

以上と関連して気のついた点を補足として記しておこう．

1. S^D と diffeomorphic な多様体上の Dirac 代数の既約表現空間は，多様体の smooth な変形のもとで不変であることをみた．いわばこの際，表現空間を決定しているのは，多様体の topology であって，その形ではないのである．恐らくこれは，何個かの primary constraints が配位空間上の位置 だけの関数であるという，いわばホロノーム系では，つねに成り立つ性質なのかもしれない．

2. 本文でみたように，多様体の変形に伴う Dirac 代数の変化は，正準変数に対するある種の変数変換によって記述される．この際，ヒルベルト空間上の状態ベクトルは変化しない．この変換は constraint や交換関係の形を変えてしまうので，適当なユニタリー演算子およびその逆を変数の左右からかけることによって実現することはできない．従ってここでは，ハイゼンベルグ描像とシュレディンガー描像の関係のように，演算子の変換を状態ベクトルの変換に移行させることは不可能である．

3. なおこれと関連して次の remark を挿入する．

本文では，スケール変換や area-preserving mapping に伴う波動関数の変化を記したが，これは見かけだけのものであって状態ベクトルの変化を意味しない．(1.7) で左辺を右辺に書き変えるときに

$$\int dx^{D+1}\,\delta(f(x))\,|\,x><x\,|=1 \tag{4.1}$$

を使い $|\,\varphi>$ に対応した波動関数を $\varphi(x)=<x\,|\,\varphi>$ とした．他方，例えば area-preserving mapping のもとで $g(x')=f(x)$ とするとき，上と同型の式を $g(x)$ に対しても成り立たせるために $|\,x'\acute{>}\equiv|\,x>$ として

$$\int dx'^{D+1}\,\delta(g(x'))\,|\,x'\acute{>}\grave{<}x'\,|=1 \tag{4.2}$$

が用いられ，波動関数 $\varphi'(x')=\grave{<}x'\,|\,\varphi>$ が導入された．しかし (4.1) と (4.2) は変数の単なる書き換えに過ぎず，波動関数も (2.18) にみるように実質的な変更を受けていない．

なお，$|\,x>$（$=|\,x'\acute{>}$）は埋め込みの結果として導入された形式的な状態ベクトルである．意

味があるのは $|x>|_{f(x)=0}$ （$=|x'\acute{>}|_{g'(x')=0}$）であって，これは $|\varphi>$ と同じ physical Hilbert 空間に属する．このようなやや曖昧さを含む状態ベクトル $|x>$ （$|x'\acute{>}$）を除くには，埋め込みをやめて多様体の上に座標の張り付けをしなければならないが，この作業はあまり簡単ではなさそうである．

4. 本文で述べた議論を場の量子論に拡張できるかという問題がある．つまり場の配位が，時空の各点において，S^D に diffeomorphic な多様体上に拘束されているとき，これを記述する Dirac 代数の表現はどうなるかという問題である．しかしこれに正面から答えるのはそれ程簡単ではない．それは場の理論のように自由度が無限に大きい系では，質的に全く異なった状況が生じるからである．例えばもっとも簡単な場合として S^1 上に拘束された場を考えてみよう．このときの Dirac 代数を表現するヒルベルト空間があったとすると，実は，そこでは S^1 上の点をすべて同等に扱うことが，相対論・非相対論を問わず不可能であるという事態が発生する [4]．いわば S^1 上の 1 点が特異点となって $SO(2)$ の対称性が自発的に破れざるを得ないのである．これは，場が S^D 上に拘束されている場合も同じだと考えられるゆえ，$SO(D+1)$ の対称性はこのときも自発的に破れることが予想される．

このような対称性の自発的な破れを持つ既約表現ができたとして，これを S^D と diffeomorphic な多様体上の Dirac 代数に従う場の量子論に移行することを考えたとき，そこでの正準変数がたとえ前のように変数変換の式で作られたとしても，問題はそれだけでは済まされない．すでに第 2 節の終わりで述べたようにこの変数変換にはダイナミックスの変更が伴う．そうしてそれに応じて，系の基底状態として真空を表す状態ベクトルもまた変更されると考えられる．真空状態の存在は場の表現空間が与えられると一意的とみなされるゆえ，いわばこのような多様体の変形に基づく真空状態の変化は，とりもなおさず表現空間の変更に他ならない．すなわち，場を拘束している多様体が少しでも変形すると表現空間は非同値なものへと移行することになる．本文に見たようなヒルベルト空間が多様体のかたちではなくトポロジーだけに依存して決定した有限自由度の場合とは，事情は全く異なると考えられる．

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950); *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).

[2] H. Omori, Proc. of Symposia in Pure Mathematics **XV**, 167 (AMS, 1970).

[3] Y. Ohnuki and S. Kitakado, J. Math. Phys. **34**, 2827 (1993); especially see Section VI and Appendix.

[4] Y. Ohnuki, Proc. VI Wigner Symposuim, Istanbul '99 (to be published).